Rechenmethoden der Physik II

Sonderübungen, Zettel 04 **Vorrechnung der Lösungen ab dem 01.09.2009**

[SÜ12]

In der Vorlesung hatten Sie bereits gesehen, wie beispielsweise eine Lösung der Differentialgleichung für den getriebenen harmonischen Oszillator durch explizite Integrale ausgedrückt werden kann. Hierzu wurde von der Fouriertransformation Gebrauch gemacht. Drücken Sie die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen auf ähnliche Weise durch solche Integrale aus:

1. $\dddot{x}(t) - \dot{x}(t) = f(t)$
2. $\triangle\phi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\partial_t\phi(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)$
3. $\alpha\ \partial_x\phi(\vec{r},t) + \frac{\beta}{c}\ \partial_y\partial_t\phi(\vec{r},t) + \gamma\ (\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \triangle)\phi(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)$

[SÜ13]

Leiten Sie mit Hilfe der Fouriertransformation die (offensichtliche) spezielle Lösung der folgenden Differentialgleichung her (A, B, C, D, E konstant):

$$Ag'''(x) + Bg''(x) + Cg'(x) + Dg(x) = E\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Fouriertransformieren Sie linke und rechte Seite der Differentialgleichung und geben Sie durch Koeffizientenvergleich die entsprechende algebraische Gleichung für die Fouriertransformierte $\tilde{g}(k)$ an.
2. Bestimmen Sie die Lösung $g(x)$ nun durch Rücktransformation.

[SÜ14]

Bestimmen Sie nun mit Hilfe der Fouriertransformation explizit die Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{\gamma\ t}{(t^2 + a^2)^2}\,.$$

Überprüfen Sie Ihre Lösung durch Einsetzen!

Hinweise: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{t^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\mathrm{e}^{-a|\omega|}$, $\frac{t}{(t^2+a^2)^2} = \partial_t(\cdots)$, partiell integrieren

Bitte wenden

[SÜ15]

Gegeben sei nun die oben erwähnte Differentialgleichung des eindimensionalen getriebenen harmonischen Oszillators:

$$\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = f(t)\,.$$

Wie Sie aus der Vorlesung bereits wissen, ist die Greensfunktion $G(t-t')$ zu solch einer Differentialgleichung diejenige Funktion, welche dieselbe Gleichung erfüllt, mit dem einzigen Unterschied, dass der Term $f(t)$ auf der rechten Seite durch eine Deltafunktion $\delta(t-t')$ ersetzt wird. Lösen Sie die Differentialgleichung für die Greensfunktion mit Hilfe der Fouriertransformation, wie in Aufgabe **[SÜ13]** beschrieben, für die beiden Spezialfälle

(a) $\gamma = 0\,,$

(b) $\omega_0 = 0\,.$

Hinweis: Führen Sie hierzu eine Partialbruchzerlegung durch und nutzen Sie außerdem die Integrationsvorschrift

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{\omega - \alpha} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\Theta(t), \quad \alpha \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\alpha) \geq 0\,.$$